Gymnasium Odenthal

2. Klausur 12 MG, Schuljahr 2008/2009
Mathematik als Grundkursfach

***Arbeitszeit*:**	90 Minuten
***Lernbereich* :**	Analysis
Thema:	Integralrechnung

Name: ______________________ *Datum:* *02. Dezember 2008*

Anzahl der abgegebenen Bögen (ohne Aufgabenblatt): 1

Bewertungseinheiten (BE): von

Zensurenpunkte: Datum: Unterschrift:

HINWEIS: Der Lösungsweg ist ausführlich darzulegen.

Aufgabe I

1 Bestimmen Sie unter Verwendung von Stammfunktionen die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$ und der x-Achse begrenzt wird!

2 Die Graphen von $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ schließen eine Fläche ein. (siehe Abbildung I).
Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes unter Verwendung von Stammfunktionen!

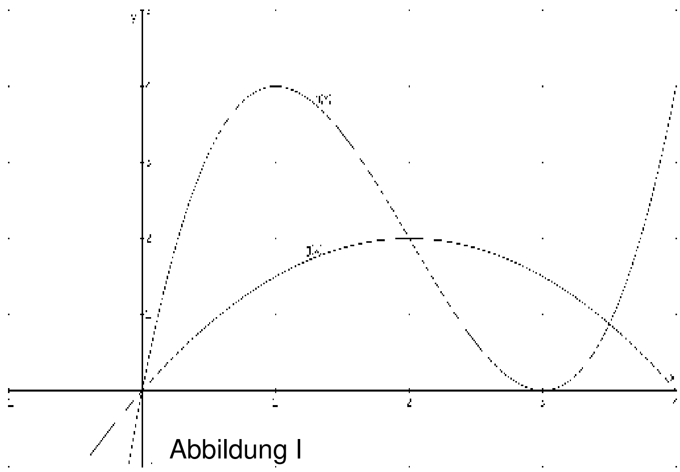


Abbildung I

Aufgabe II

Gegeben seien die Funktionen

$f(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$ und

$g(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8$.

1 Ordnen Sie die beiden Funktionsterme den beiden Funktionsgraphen aus Abbildung II zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

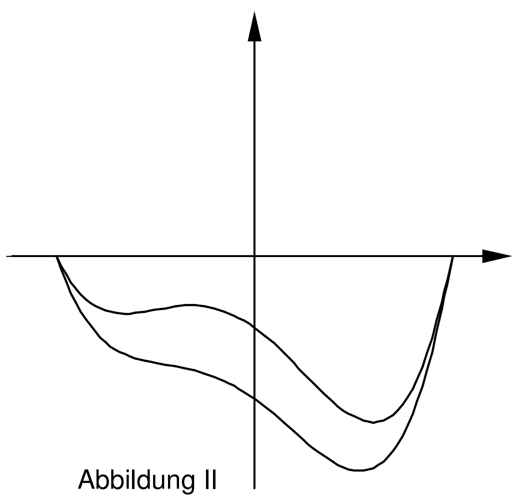


Abbildung II

2 Der Graph der Funktion *f* beschreibt das Flussbett eines für den Schiffsverkehr freigegebenen Flusses. Eine Einheit auf der x-Achse entspricht dabei 10 Metern in der Wirklichkeit und eine Einheit auf der y-Achse entspricht einem Meter in der Wirklichkeit. Die Wasseroberfläche wird durch die x-Achse beschrieben.
Die rechte Fahrrinne des Flusses soll auf einem geradlinigen 200 Meter langen Flussabschnitt vertieft werden. Für die Bauarbeiten wird das Wasser am Anfang und am Ende dieses Flussabschnitts gestaut und umgeleitet.

Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Flusses und bestimmen Sie damit die Wassermenge, die in dem 200m langen Flussabschnitt abgepumpt werden muss.

3 Das Flussbett soll so ausgehoben werden, dass wieder eine Fahrrinne (rechts) und eine Vegetationszone (links) vorhanden ist. Das neue Flussbett kann mithilfe der Funktion *g* beschrieben werden.

Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Aushubs.
Bestimmen Sie das Volumen des Aushubs für den gesamten Flussabschnitt und die daraus resultierende prozentuale Zunahme des Wasservolumens der Fahrrinne.

4 Begründen Sie rechnerisch, dass die neue Fahrrinne mindestens 10 m tief ist.

Aufgabe III

In der Abbildung III ist ein Ausschnitt eines Graphen zu sehen, der im Zeitintervall von 0 bis 2,5 min die Geschwindigkeit eines Helikopters in **senkrechter** Richtung $v_{vertikal}$ (also sein Steigen bzw. Sinken) beschreibt.
Dabei wird die Zeit *t* in Minuten (*min*) und die Geschwindigkeit $v_{vertikal}$ in Meter pro Sekunde (*m/s*) angegeben.

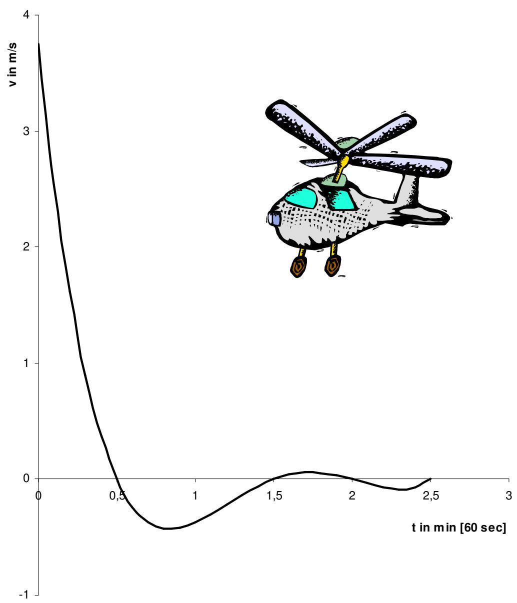


Abbildung III

1 Beschreiben Sie das Flugverhalten in der Zeit von 0 min bis 2,5 min. Gehen Sie dabei auf die Nullstellen und die Extrempunkte von $v_{vertikal}$ ein!

Begründen Sie anhand der Informationen aus dem gegebenen Diagramm, dass der gezeigte Graph zu einer ganzrationalen Funktion 4. Grades gehört!

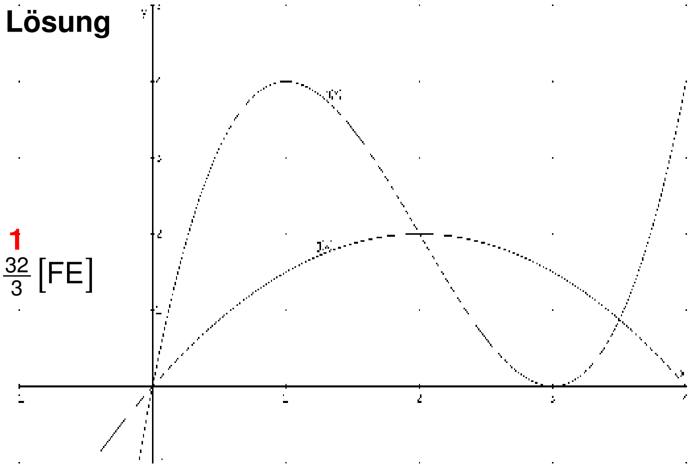
2 Skizzieren Sie die Form eines zu diesem Steigvorgang passenden Höhe-Zeit-Diagramms! Sie brauchen dabei eine Einteilung der senkrechten Achse (also der Höhe) nicht durchzuführen. Die von Ihnen skizzierte Funktion und die Funktion $v_{vertikal}$ stehen in einem mathematischen Zusammenhang. Geben Sie diesen Zusammenhang an!

3 Es sei $v_{vertikal} = t^4 - \frac{13}{2}t^3 + \frac{59}{4}t^2 - \frac{107}{8}t + \frac{15}{4}$

Ermitteln Sie die Gleichung einer zu diesem Steigvorgang passenden Höhe-Zeit-Funktion! Berechnen Sie für die Zeit von 0 bis 0,5 min den Gesamthöhenunterschied, den der Helikopter durchfliegt!

4 Nach 2,5 min Flugzeit landet der Hubschrauber. Begründen Sie, dass der Landeplatz auf einem Gebäude liegt!

2. Klausur 12 MG, Schuljahr 2008/2009   Lösung



Aufgabe I

1 $0=\frac{1}{2}x^3-2x^2 \quad \Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=4$ 1 2

7 $A=\left|\int_0^4\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^4\right|=\left|-\frac{32}{3}\right|=\frac{32}{3}\,[FE]$ 1 1 1 1

2 $x^3-6x^2+9x=-\frac{1}{2}x^2+2x$ 1

$x^3-5{,}5x^2+7x=0$

9 $x_1=0\,;\,x_2=2\,;\,x_3=3{,}5$ 3

$A=\int_0^2\left(x^3-5{,}5x^2+7x\right)dx+\int_2^{3{,}5}\left(x^3-5{,}5x^2+7x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{11}{6}x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{11}{6}x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_2^{3{,}5}$ 1 1 1

$A=\frac{10}{3}+\left|-\frac{99}{64}\right|=\frac{937}{192}\approx 4{,}88\,[FE]$ 1 1

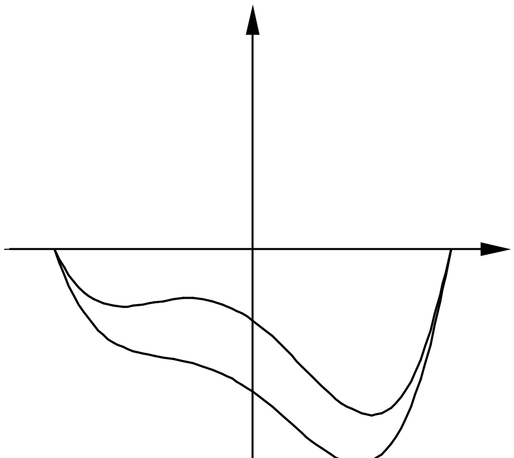


Abbildung II

Aufgabe II

Gegeben seien die Funktionen

und $g(x)=x^4+x^3-2x^2-4x-8$.

1 obere Funktion: f 1

3 untere Funktion: g

Begründung: z.B. y-Achsenabschnitt 2

2 $0=(x-2)(x^3+3x^2+3x+2)$ 1

$x_1=2\,;\,x_2=-2$ 2

6 $A=\left|\int_{-2}^{2}\left(x^4+x^3-3x^2-4x-4\right)dx\right|=\left|-\frac{96}{5}\right|=19{,}2\,[FE]$ 1 1

$V = 19{,}2 \cdot 10\ m^2 \cdot 200\ m = 38400\ m^3$ 1

3 $(x-2)(x^3+3x^2+3x+2)=x^4+x^3-2x^2-4x-8$ 1 $x^4+x^3-3x^2-4x-4=x^4+x^3-2x^2-4x-8$

$0=4-x^2 \quad \Rightarrow x=\pm 2$ 2

6 $A=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}\,[FE]$ 1 1

$V = 10{,}67 \cdot 10\ m^2 \cdot 200\ m = 21333\ m^3 = 55{,}556\ \%$ 1 0

2 **4** z.B. $g(1)=-12<-10$ 2

Aufgabe III

1 0 – 0,5 min: Steigen des Hubschraubers (langsamer werdend) 1

0,5 – 1,5 min: Sinken des Hubschraubers 1 +1

1,5 – 2 min: Steigen des Hubschraubers 1

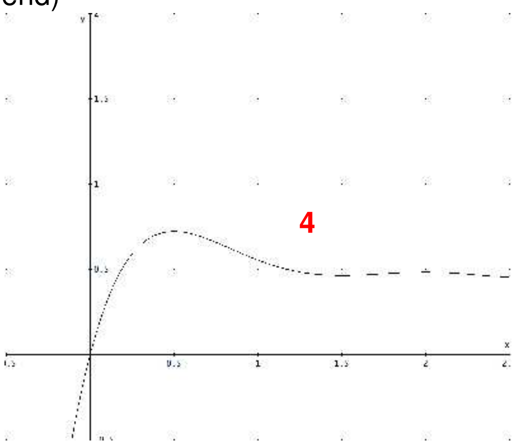
8 2 – 2,5 min: Sinken des Hubschraubers bis Landung 1

Nullstellen: Wechsel von Steig- und Sinkflug 1

Extrempunkte: max. Steig-/Sinkgeschwindigkeit im Zeitraum (Intervall) 1

ganzrationalen Funktion 4. Grades: z.B. 4 NS oder 3 EP 1

5 **2** Zusammenhang: Funktion $v_{vertikal}$ ist die Ableitung der skizzierten Funktion 1



4

3 Es sei $v_{vertikal}=t^4-\frac{13}{2}t^3+\frac{59}{4}t^2-\frac{107}{8}t+\frac{15}{4}$

4 $V_{vertikal}=\frac{1}{5}t^5-\frac{13}{8}t^4+\frac{59}{12}t^3-\frac{107}{16}t^2+\frac{15}{4}t$ 2

$V(0{,}5)-V(0)=0{,}722 \Rightarrow \Delta h=0{,}722\cdot 60=43{,}344\,[m]$ 1 1

3 **4** Begründung: z.B. Fläche oberhalb der t-Achse > Fläche unterhalb der t-Achse 3

Σ53